

Tentamen Calculus 1

8 november 2010, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven waarvoor in het totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: $9 + 1$ (gratis) = 10. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

- (a) Formuleer het principe van volledige inductie.
(b) Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

- Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan

$$2z^4 + 2z^2 + 1 = 0$$

en schets de ligging van deze getallen in het complexe vlak.

- (a) Vul de volgende definitie aan:
De afgeleide van een functie f in een punt a wordt gegeven door

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \dots$$

- (b) We nemen aan dat $f(x)$ differentieerbaar is voor $-\infty < x < \infty$.

Vul de volgende definitie aan:

De afgeleide f' is continu in een punt a indien ...

- (c) We noemen een functie f continu differentieerbaar op $(-\infty, \infty)$, indien $f(x)$ differentieerbaar voor alle $x \in (-\infty, \infty)$ en de afgeleide $f'(x)$ continu is voor alle $x \in (-\infty, \infty)$.

Neem aan dat f en g continu differentieerbaar zijn op $(-\infty, \infty)$, $g'(a) \neq 0$ en $f(a) = g(a) = 0$. Toon aan dat (de regel van l'Hospital juist is):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- (d) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{1/x} - x)$$

- (a) De functie $f(x)$ is gedefinieerd voor $-\infty < x < \infty$. Geef de ϵ - δ -definitie van

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

